Exercices de calcul - correction

1 Calcul numérique et ordres de grandeur

Exercice 1.1

1. $1,2 \times 10^{-22}$
2. $10^2/10^{-6} = 10^8$
3. $10^3/(10^3)^2 = 10^{-3}$
4. $2^4 = 16$
5. 2×10^{-17}
6. 2×10^{-15}
7. $\sqrt{4 \times 10^4} = 200 = 2 \times 10^2$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{16}} \times \dfrac{1}{\sqrt{10^{-4}}} = 25 = 2,5 \times 10^1$

Exercice 1.2

1. $\cong 3 \times 0,1^2 \times 1000 \cong 30$
2. $\cong 4 \times 0,02^3 = 32 \times 10^{-6} \cong 3 \times 10^{-5}$
3. $\cong 400 \times 25 \times 4000 \times 3 \times 10^8 = 10^4 \times 12 \times 10^3 \times 10^8 \cong 1,2 \times 10^{16}$
4. $\cong 10^3/(10^{-2})^2 = 10^7$
5. $\cong 100^2 = 10^4$
6. $\cong 10 \times 10/sin(30°) = 100/0,5 = 200$
7. $\cong 10 \times tan(45°) \cong 10$

Exercice 1.3

1. $10cm = 10 \times 10^{-2}m = 10^{-1} \times 10^6 \mu m = 10^5 \mu m$
2. $10nm = 10 \times 10^{-9}m = 10^{-8}m$
3. $5km^2 = 5 \times (10^3m)^2 = 5 \times 10^6 m^2$
4. $5m^3 = 5 \times (100cm)^3 = 5 \times (10^2)^3 cm^3 = 5 \times 10^6 cm^3$
5. $0,4L = 0,4dm^3 = 0,4 \times (10^{-1}m)^3 = 0,4 \times 10^{-3}m^3 = 4 \times 10^{-4}m^3$
6. $2\mu m^3 = 2 \times (10^{-6}m)^3 = 2 \times 10^{-18}m^3$
7. $3g.cm^{-3} = 3 \times 10^{-3}kg \times (10^{-2}m)^{-3} = 3 \times 10^3 kg.m^{-3}$
8. $72km.h^{-1} = 72 \times 10^3 m/3600s = 20m.s^{-1}$
9. $4,18J.g^{-1} = 4,18 \times 10^{-3}kJ \times (10^{-3}kg)^{-1} = 4,18kJ.kg^{-1}$

Exercice 1.4

1. $x = \sqrt{2E/k}$.
2. $L = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$.
3. $t = \tau ln(E/u)$.
4. $R = (\frac{3V}{4\pi})^{1/3}$
5. $p = \sqrt{2m(E - mgz)}$
6. $\overline{OA} = 1/\left(\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'}\right)$
7. $V = (C/P)^{1/\gamma}$.
8. $a = V^2\left(\frac{RT}{V - nb} - P\right)$
9. $x = \frac{K_a C_0}{1 + K_a}$

Exercice 1.5

1. *masse d'un atome d'hydrogène :* $m = M/N_A \cong \frac{1g}{6 \times 10^{23}} \cong 0,2 \times 10^{-23}g = 2 \times 10^{-27}kg$. **Il fallait donc choisir** $1,67 \times 10^{-27}kg$
2. *masse d'un mètre cube d'air :* Le volume molaire des gaz vaut environ $25L.mol^{-1}$, donc dans un m^3 il y a environ $40mol$ de gaz. L'air est essentiellement constitué de N_2 et O_2, de masse molaire de l'ordre de $25g.mol^{-1}$ (comment peut-on le savoir ? il suffit de penser à la masse molaire du carbone, $12g.mol^{-1}$, et de se rappeler que C, N et O sont voisins dans le tableau périodique). Finalement dans un m^3 d'air on trouve environ $40 \times 25g = 1000g = 1kg$ d'air. **La bonne réponse est donc** $1,2kg.m^{-3}$
3. *nombre de molécules dans un litre d'eau :* La masse molaire de l'eau H_2O est d'environ $20g$. Dans un litre il y a $1kg$ d'eau soit $n \approx \frac{1000}{20} = 50mol$. Il y a donc $50 \times N_A \approx 50 \times 6 \times 10^{23} = 3 \times 10^{25}$ molécules d'eau dans un litre. **Il fallait donc choisir** $3,34 \times 10^{25}$.
4. *Superficie de la France* : La France, que l'on qualifie souvent d'hexagone, est encore plus grossièrement un carré de côté $1000km$. Sa superficie vaut donc environ $1000 \times 1000km^2 = 10^6km^2$. **Il fallait donc choisir** $6,43 \times 10^5km^2$. C'est le deuxième plus grand pays d'Europe !
5. *Superficie de la Terre* : Le rayon de la Terre est de l'ordre de $6000km$ (çà, c'est de la culture générale de SVT, non ? Sachez que historiquement, le périmètre de la terre a été *défini* comme égal à 40 000 km exactement). Et comme chacun sait, l'aire d'une sphère vaut $S = 4\pi r^2$ (il faut connaître au moins les célèbres formules $L = 2\pi r$, $S = 4\pi r^2$, et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$). Ainsi $S \approx 12 \times 6000^2 \approx 4 \times 10^8km^2$. **Il fallait donc choisir** $5,1 \times 10^8km^2$**.**
6. *masse de la Terre :* La densité de la roche est d'environ 5 (on rappelle que c'est 1 pour l'eau, et environ 10 pour un bon nombre de métaux courants - mais on ne demande qu'un ordre de grandeur...). Sa masse volumique est donc approximativement $\rho = 5kg.L^{-1} = 5 \times 10^3kg.m^{-3}$. Le volume de la Terre, considérée (carrément) comme un cube de $10000km$ de côté, vaut $V \approx (10000km)^3 = (10^4 \times 10^3m)^3 = 10^{21}m^3$ d'où une masse d'environ $5 \times 10^{24}kg$. **Il fallait donc choisir** $6 \times 10^{24}kg$.

Exercice 1.6

1. *Avec l'eau d'une piscine municipale, a-t-on assez à boire pour toute la vie ?* Par jour nous avons besoin d'environ $2L$ d'eau. Avec un peu de chance, nous vivons 100 ans, soit $100 \times 365 \approx 100 \times 400 = 4 \times 10^4$ jours, d'où un volume d'eau de $8 \times 10^4L = 80m^3$. Dans une piscine de $25 \times 10 \times 2m$, on a $500m^3$, soit largement assez pour toute la vie.
2. *Combien avez-vous de cheveux ?* Avec un espacement entre deux cheveux de l'ordre du mm, on a une densité capillaire de 100 cheveux par cm^2. Pour une surface couverte d'environ $30cm \times 30cm$ (sauf cas d'alopécie androgénétique répandue chez les professeurs de physique), on arrive à $N \approx 30 \times 30 \times 100 \approx$ 100 000 cheveux.

3. *Quelle est la longueur totale des trottoirs de Paris ?* On assimile Paris à un carré de $10km$ de côté strié de rues parallèles espacées de $100m$. On en déduit une longueur de rues d'environ $100 \times 10km$ dans le sens nord-sud, et autant dans le sens est-ouest, et deux fois plus pour la longueur des trottoirs, ainsi $L \approx 2 \times 2 \times 100 \times 10km \approx 4000km$ (Google nous apprend que $L \approx 1900km$ - l'espace moyen entre deux rues est sans doute supérieur à 100m...).
4. *Peut-on transporter un milliard d'euros en argent liquide dans une petite camionnette ?* En empilant une dizaine de billets on obtient une épaisseur proche du mm. Pour faire rentrer le maximum d'argent dans une camionnette ($6m^3$?), on va utiliser des billets de 500 euros (avant leur disparition en 2019). Si ces billets font $10 \times 15cm$, chaque billet a un volume $v \approx 0,1 \times 10^{-3} \times 0,10 \times 0,15 = 1,5 \times 10^{-6} m^3$. On peut donc faire entrer $N \approx \dfrac{6}{1,5 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^6$ billets, soit deux milliards d'euros, ce qui représente 150 000 années de paye au SMIC, mais seulement la moitié de la fortune de Donald Trump !
5. *Quel est le nombre de candidats qui se présentent au bac en France chaque année ?* Nous sommes environ 70 millions de français (cours de géographie - éducation civique ?). Parmi ceux-ci, seule une classe d'âge (en gros, la 18ème année) passe le bac. Pour simplifier, si les français vivent 70 ans en moyenne, cette classe d'âge représente 1/70 des français, soit un million. Mais seulement 2/3 d'une classe d'âge passe le bac : on a donc environ 700 000 candidats (et à peu près autant de reçus ?). Question subsidiaire : estimez la hauteur totale des paquets de copies à corriger.

2 Calcul dimensionnel

Exercice 2.1

1. $f = 1/t$ donc $(F) = 1/(t) = 1/T = T^{-1}$
2. $\vec{p} = m\vec{v}$ donc $(p) = M \times L.T^{-1} = MLT^{-1}$
3. $\rho = m/V$ donc $(\rho) = M/L^3 = M.L^{-3}$
4. Chute libre $\vec{g} = \vec{a}$ donc $(g) = (a) = L.T^{-2}$
5. $P = F/S$ donc $(P) = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}$
6. I/I_0 est sans dimension, le log aussi, donc L aussi.
7. $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ donc $(E_c) = ML^2T^{-2}$
8. $P = dE/dt$ donc $(P) = ML^2T^{-3}$
9. $E = h\nu$ donc $(h) = (E)/(\nu) = ML^2T^{-1}$
10. $W = \vec{F} \cdot \vec{L}$ donc $(W) = ML^2T^{-2}$ (dimension de toutes les énergies).
11. Un angle n'a pas de dimension physique, seulement une dimension mathématique (deg, rad).
12. v/c n'a pas d'unité, donc γ non plus.
13. $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ donc $(\tau) = \sqrt{(l)/(g)} = \sqrt{\dfrac{L}{LT^{-2}}} = T.$

Exercice 2.2

$(PV) = (P)(V) = ML^{-1}T^{-2} \times L^3 = ML^2T^{-2}$. Il suffit de déterminer la dimension associée à chacune des unités proposées. Par exemple le $N.m$ a la dimension $MLT^{-2} \times L$, on retrouve bien la dimension ML^2T^{-2}, donc cette unité convient. On montre de même que J convient (PV a la dimension d'une énergie), ainsi que $W.s$, mais pas $Pa.m^2$.

De même on trouve que $(K_c) = MT^{-2}L^{-1/2}$. Donc la ténacité peut s'exprimer en : $N.m^{-3/2}$, $Pa.m^{1/2}$ mais pas en $J.m^{1/2}$ ni en $N.m^{-1/2}$

Exercice 2.3

1. $S = \dfrac{h + H^2}{L}$ impossible (voir l'énoncé).
2. $V = 2\pi Rh$ impossible car $(V) = L^3$ alors que $(2\pi Rh) = L^2$
3. $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ impossible car $(\sqrt{\dfrac{g}{L}}) = T^{-1}$
4. $F = \dfrac{1}{2}\rho Sv$ impossible car $(F) = MLT^{-2}$ et $(\rho Sv) = ML^{-3}L^2LT^{-1} = MT^{-1}$
5. $F = \dfrac{mg}{cos(\alpha)}$ OK
6. $v = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$ OK
7. $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ OK
8. $U = U_0e^{-2t}$ Possible si le "2" a bien la dimension de l'inverse d'un temps.
9. $\dfrac{L^2}{\tau}ln(t_2/t_1)$ a la même dimension que $\dfrac{L^2}{\tau}$, soit L^2T^{-1}. Ce n'est donc pas une vitesse.
10. $\dfrac{r_1r_2r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$ a la dimension de r^2, donc pas de R.
11. $\dfrac{p}{\rho}$ et $\dfrac{v^2}{2}$ ont bien la même dimension, mais pas g/z. Donc : faux.
12. $t^2 = \dfrac{1}{f^2}[1 - \dfrac{1}{2}cos(3t)]$ OK.
13. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{g}{L}$ Faux car $\dfrac{g}{L}$ a pour dimension T^{-2}, alors que $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $L.T^{-1}$.
14. $\ddot{x} + \dfrac{\dot{x}}{\tau} + \dfrac{g}{L(1 + t/T)}x = 0$ OK. Par exemple $\dfrac{g}{L(1 + t/T)}x$ a bien comme dimension $L.T^{-2}$.

Exercice 2.4

1. $L = L_0e^{-\mathbf{k}x}$: L'argument de l'exponentielle ne peut pas avoir de dimension : $(k)(x) = 1$ soit $(k) = L^{-1}$
2. $U = U_{max}sin(\mathbf{a}t)$: De même ici, $(a)T = 1$ donc $(a) = T^{-1}$ (a est homogène à une fréquence).
3. $v = \sqrt{\dfrac{PV}{\mathbf{a}}}$: On trouve $a = \dfrac{PV}{v^2}$ donc $(a) = \dfrac{ML^2T^{-2}}{L^2T^{-2}} = M$.
4. $v = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\mathbf{A}\pi}{\rho\lambda}}$: On trouve que $(A) = MT^{-2}$: cela peut correspondre à une force par unité de longueur.

Exercice 2.5

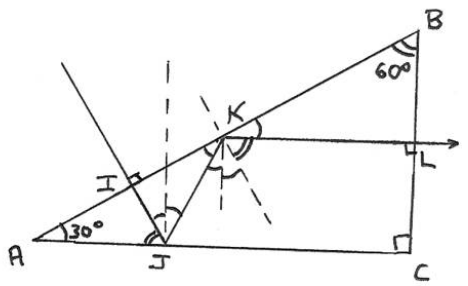
1. *La durée de la chute libre d'un objet, en fonction de sa masse m, de sa hauteur de chute h, et de l'intensité de la pesanteur g.* On pose $t = h^ag^bm^c$. En passant aux dimensions on obtient $T = L^a(LT^{-2})^bM^c = L^{a+b}T^{-2b}M^c$, d'où $c = 0$, $a+b = 0$, $b = -1/2$, donc $a = 1/2$. On trouve ainsi que la durée t_c de chute est proportionnelle à $\sqrt{\dfrac{h}{g}}$, soit $t_c \approx \sqrt{\dfrac{h}{g}}$. On prévoit ainsi qu'elle est indépendante

de la masse tant que l'on peut négliger les frottements (Galilée est le premier à l'avoir compris). Dans ce cas très simple, la formule exacte peut bien sûr être obtenue à partir de la loi de la chute libre :$\frac{1}{2}gt^2 = h$, et on trouve que $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. On voit que le coefficient de proportionnalité vaut $\sqrt{2}$, qui est proche de l'unité : ainsi la formule "devinée" donne un bonne idée de l'ordre de grandeur du résultat.

2. *La vitesse finale d'un objet en chute libre, en fonction de sa masse m, de sa hauteur de chute h, et de l'intensité de la pesanteur g.* : On pose $v = h^a g^b m^c$, soit en passant aux dimensions : $LT^{-1} = L^a(LT^{-2})^b M^c$. On en déduit que $c = 0$, $-2b = -1$, $a + b = 1$, soit $a = b = 1/2$. Ainsi, la vitesse finale v est proportionnelle à $\sqrt{gh}$, elle est indépendante de la masse. Ici encore, la conservation de l'énergie mécanique permet de trouver très simplement le résultat exact, puisque $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ conduit immédiatement à $v = \sqrt{2gh}$.
3. *La période t d'oscillation d'un pendule en fonction de la longueur l du pendule, de l'intensité de la pesanteur g, et de la masse m du pendule.* : on pose $t = l^a g^b m^c$, d'où $T = L^{a+b}T^{-2b}M^c$ d'où $c = 0$, $b = -1/2$, $a = 1/2$, et $t \approx \sqrt{l/g}$. Ici les lois de Newton permettraient de démontrer que pour de petites oscillations, $t = 2\pi\sqrt{l/g}$.
4. *La période t d'oscillation d'une masse accrochée à un ressort, en fonction de la masse m, de l'intensité de la pesanteur g, et de la raideur k du ressort* : On pose $t = m^a k^b g^c$ avec $(k) = MT^{-2}$ et $(g) = LT^{-2}$. On en tire $T = M^{a+b}T^{-2b-2c}L^c$, et $c = 0$, $b = -1/2$, $a = 1/2$. Ainsi $t \approx \sqrt{m/k}$. Ici les lois de Newton permettraient de démontrer que $t = 2\pi\sqrt{m/k}$.
5. *La surpression ΔP à l'intérieur d'une bulle de savon, en fonction de sa tension superficielle γ (en $N.m^{-1}$) et du rayon R de la bulle.* On pose $\Delta P = \gamma^a R^b$ soit $ML^{-1}T^{-2} = (MT^{-2})^a L^b$ d'où $a = 1$, $b = -1$, et $\Delta P \approx \gamma/R$. Le calcul exact donne $\Delta P = 2\gamma/R$.
6. *La durée t de refroidissement d'un objet en fonction de sa taille caractéristique l, de sa conductivité thermique λ(en $W.m^{-1}.K^{-1}$), de sa masse volumique ρ, et de sa capacité calorifique massique C (en $J.K^{-1}.kg^{-1}$)* : On pose $t = l^a \lambda^b \rho^c C^d$, on en déduit $T = L^a(MLT^{-3}\theta^{-1})^b(ML^{-3})^c(L^2T^{-2}\theta^{-1})^d$ soit $T = L^{a+b-3c+2d}T^{-3b-2d}\theta^{-b-d}M^{b+c}$, d'où $b = -1$, $d = 1$, $c = 1$, $a = 2$, et finalement $t \approx \frac{\rho c l^2}{\lambda}$. Cela signifie par exemple que si l'on multiplie par deux la taille d'un objet, il va mettre quatre fois plus de temps à 'refroidir'.

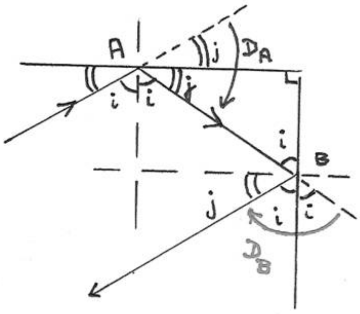
3 géométrie

Exercice 3.1



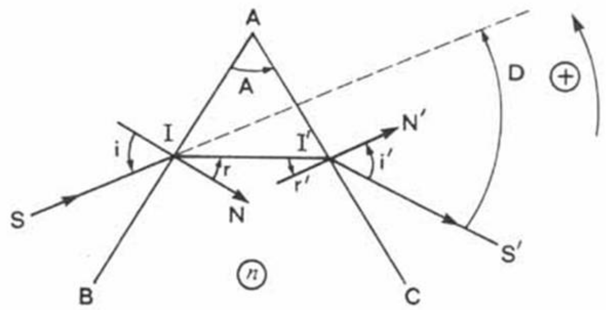
On utilise les angles complémentaires, alternes/internes, et le fait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Les angles marqués d'un trait simple valent 30°, ceux marqués d'un trait double valent 60°. Finalement le rayon parvient en L à angle droit, donc ressort tout droit vers la droite.

Exercice 3.2



Sur le schéma les angles i sont repérés par un trait simple, les angles j par un trait double. Comme on le voit sur ce schéma, au premier choc (en A) la boule est déviée de $D_A = 2j$ (au lieu de poursuivre tout droit, elle 'tourne' de $2j$ vers la droite). Au deuxième choc (en B) elle est déviée de $D_B = 2i$. Sa déviation totale vaut donc $2i + 2j = 2 \times (i + j) = 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$. La boule repart donc bien en arrière, dans la direction opposée à sa direction initiale.

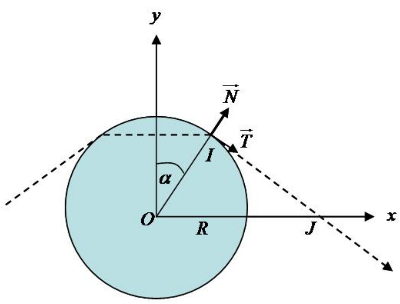
Exercice 3.3



Dans le triangle AII', la somme des angles vaut π, soit : $\hat{A} + (\pi/2 - r) + (\pi/2 - r') = \pi$, d'où $\hat{A} = r + r'$. Au point I, le rayon est dévié de $i - r$, et au point I' il est dévié de $i' - r'$. Au total la déviation vaut donc $D = i - r + i' - r = i + i' - (r + r') = i + i' - \hat{A}$.

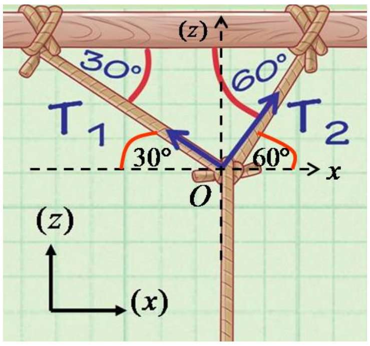
4 Vecteurs

Exercice 4.1



$\vec{T}$ fait un angle $-\alpha$ par rapport à (x), donc $\vec{T}(cos(-\alpha); sin(-\alpha))$, soit $\vec{T}(cos(\alpha); -sin(\alpha))$. On trouve de même : $\vec{N}(sin(\alpha); cos(\alpha))$. L'angle $O\hat{J}I$ vaut α (angles complémentaires), donc $OJ = \dfrac{R}{sin(\alpha)}$ et $\vec{OJ}$ fait un angle α avec $\vec{T}$, donc dans le repère $(\vec{T}, \vec{N})$, on a : $\vec{OJ}\left(\dfrac{R}{tan(\alpha)}, R\right)$.

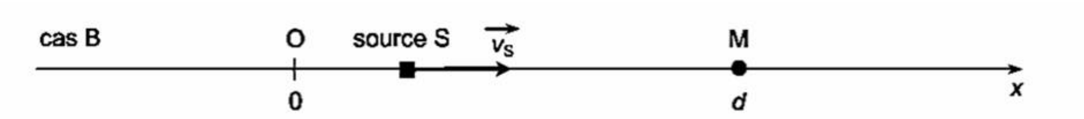
Exercice 4.2



On peut considérer que le point central (le noeud) est à l'équilibre sous l'effet de trois forces : d'après le principe d'inertie (ou de la statique), on a $\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$. En projection sur (x), on a : $-T_1 cos(30) + T_2 cos(60) = 0$, et en projection sur (z), on a : $T_1 cos(60) + T_2 cos(30) - mg = 0$. La résolution de ce système conduit à $T_1 = \dfrac{mg}{cos(60) + cos^2(30)/cos(60)} = \dfrac{mg}{2} = 49N$ (il vaut mieux savoir que $cos(60°) = cos(\pi/3) = 1/2$ et $sin(60°) = sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$). On trouve de même $T_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} mg \cong 85N$.

5 Mise en équation

Exercice 5.1



Soit t_0 l'instant auquel la source émet un premier BIP. L'abscisse de la source est alors x_S, elle se trouve donc à la distance $d - x_S$ du détecteur M. Le signal sonore parcourt cette distance en un temps $\tau_0 = \dfrac{d - x_S}{v_{son}}$.
Ce premier BIP parvient donc à l'instant $t_0' = t_0 + \tau_0 = t_0 + \dfrac{d - x_S}{v_{son}}$ au détecteur.
Le BIP suivant est émis à l'instant $t_1 = t_0 + T_0$. Entre les deux émissions, la source s'est déplacée vers M d'une distance $v_S T_0$. Le deuxième BIP doit donc parcourir seulement $d - x_S - v_S T_0$ jusqu'au détecteur. Il mettra pour cela un temps $\tau_0' = \dfrac{d - x_S - v_S T_0}{v_{son}}$. Il arrivera donc à l'instant $t_1' = t_1 + \dfrac{d - x_S - v_S T_0}{v_{son}}$ sur le détecteur.
Ainsi la durée qui s'est écoulée entre les deux réceptions vaut $T' = t_1' - t_0' = t_1 - t_0 + \dfrac{(d - x_S - v_S T_0) - (d - x_S)}{v_{son}}$, soit $T' = T_0 \left(1 - \dfrac{v_S}{v_{son}}\right)$. Le raisonnement reste bien sûr le même pour le troisième BIP et les suivants : puisque la source avance à vitesse constante, l'arrivée des BIPS en M est bien périodique de période $T' = T_0 \left(1 - \dfrac{v_S}{v_{son}}\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

Vous voyez sur cet exemple ce que l'on vous demandera souvent en prépa : introduire les notations utiles, imaginer un raisonnement, rédiger, mettre en équation, et bien sûr résoudre, sans être guidé systématiquement par des questions détaillées.

Exercice 5.2

La durée t_0 de la chute initiale est donnée par la loi de la chute libre : $\frac{1}{2}gt_0^2 = h$, soit $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. La durée du rebond suivant (aller-*retour*), jusqu'à la hauteur $h_1 = \frac{3}{4}h$ vaut $t_1 = 2 \times \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. De même, pour la durée des rebonds n et $n+1$, on a $t_n = 2 \times \sqrt{\frac{2h_n}{g}}$ et $t_{n+1} = 2 \times \sqrt{\frac{2h_{n+1}}{g}}$, et on trouve ainsi : $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. C'est-à-dire qu'en posant $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$, on a $t_2 = at_1$, $t_3 = a^2 t_1$, $t_4 = a^3 t_1$, etc. La durée totale des n premiers rebonds vaut donc $T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = t_1\left(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}\right)$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi $T_n = \frac{1-a^n}{1-a}t_1$. Puisque $a < 1$, lorsque le nombre de rebonds tend vers l'infini, T_n tend vers $T_\infty = \frac{t_1}{1-a}$. La durée totale du mouvement de la balle est $\tau = t_0 + T_\infty$. Comme on a également $t_1 = 2at_0$, on en déduit $\tau = \frac{2at_0}{1-a} + t_0 = \frac{1+a}{1-a}t_0 = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}t_0 = \sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$ (*quod erat demonstrandum*).