CPP : La Prépa des INP - site de Nancy
Calcul pour la physique - énoncés
Nicolas Hergott

Exercices de calcul pour la physique

Les exercices corrigés qui suivent ont pour objectif de vous préparer aux calculs rencontrés *en physique* dès le début de première année, que vous ayez ou non suivi la spécialité physique en terminale. Ils peuvent intéresser également des élèves de classes préparatoires à titre d'entraînement. Une certaine aisance en calcul vous permettra de vous concentrer davantage sur les aspects réellement physiques.

Les deux premières parties ont pour objectif de mieux repérer les erreurs de calculs. On s'entraîne d'abord à reconnaître des valeurs numériques aberrantes, puis on travaille sur la cohérence des unités (et plus généralement sur la notion de *dimension*). Dans les deux parties suivantes on révise quelques notions de géométrie utiles en physique. Enfin la dernière partie propose deux exemples de mise en équation d'un problème de physique, dans un style 'prépa' (assez peu guidé).
Pour vous entraîner aux aspects purement mathématiques des calculs de niveau bac (factorisations, résolution d'équations, dérivées, etc.), il existe des livres comme : *Exercices de perfectionnement en calcul - Niveau lycée* de Véronique Perdu, ou des sites internet comme : *'http ://www.les-maths-en-prepas.fr/'* - onglet : apprendre à bien calculer.

Remarque : *Les seules calculatrices autorisées en examen au CPP de Nancy sont de type "collège" (c'est à dire non programmables).* Vérifiez toutefois que vous avez accès aux fonctions *logarithme et exponentielle.* Exemples de calculatrices de ce type : Casio FX-92, HP 10s+, Texas Instruments TI-30XB, Jago.

1 Calcul numérique et ordres de grandeur

Estimer rapidement un ordre de grandeur permet de détecter des erreurs de calcul. Cela permet également de repérer les paramètres importants dans une expérience ou un problème de physique. Les quatre premiers exercices ont pour objectif de vous entraîner en *calcul mental*.

Exercice 1.1

Calculer astucieusement de tête les valeurs exactes suivantes et donner le résultat en notation scientifique. Par exemple $8 \times \sqrt{900} \times 0,125 = 8 \times 0,125 \times \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 1 \times 3 \times 10 = 30 = 3 \times 10^1$

1. $6 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-26}$
2. $\dfrac{4 \times 10^2}{(2 \times 10^{-3})^2}$
3. $\dfrac{2,5^3 \times 4^3}{(10^3)^2}$
4. $\dfrac{0,4^2 \times 5^2}{2^{-5} \times 2^3}$
5. $\dfrac{0,002^3}{4 \times 10^8}$
6. $\dfrac{1}{5 \times 10^{14}}$
7. $\sqrt{40000}$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{0,0016}}$

Exercice 1.2

Lorsque les valeurs ne "tombent pas juste", on commence par arrondir astucieusement. Par exemple, $4 \times 23,5 \times (\pi \times 10^{-2})^2 \approx 4 \times 25 \times (3 \times 10^{-2})^2 = 100 \times 9 \times 10^{-4} = 9 \times 10^{-2} \approx 10^{-1}$. *La calculatrice donnerait la valeur 0,0927743, qui est bien proche de 0,1.*
Donner de même (si possible de tête) une valeur *approximative* des quantités suivantes :

1. $\pi \times 0,112^2 \times 980,2$
2. $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 0,0213^3$
3. $365 \times 24 \times 3600 \times 3 \times 10^8$
4. $\dfrac{10^3 - 10^{-1}}{(0,0098)^2}$
5. $(97,6 - \dfrac{1,2}{6 \times 10^3})^2$
6. $\dfrac{9,7 \times \sqrt{107}}{sin(28)}$
7. $10,5 \times tan(43)$

Exercice 1.3

La plupart des applications numériques de physique nécessitent de convertir les données en unités SI. Dans cet exercice on demande de convertir de tête, en utilisant les puissances de 10 (et sans "tableau à colonnes"). *Par exemple, si on veut convertir* $5nm^3$ *en* m^3*, on pense à :* $5nm^3 = 5 \times (1nm)^3 = 5 \times (10^{-9}m)^3 = 5 \times 10^{-27}m^3$. *Il est facile d'inverser ce genre de calcul, car si l'on sait que* $1nm^3 = 10^{-27}m^3$*, il est évident que* $1m^3 = 10^{27}nm^3$.

1. 10 cm en micromètres
2. 10 nm en mètres
3. $5km^2$ en m^2
4. $5m^3$ en cm^3
5. $0,4L$ en m^3
6. $2\mu m^3$ en m^3
7. $3g.cm^{-3}$ en $kg.m^{-3}$
8. $72km.h^{-1}$ en $m.s^{-1}$
9. $4,18J.g^{-1}$ en $kJ.kg^{-1}$

Exercice 1.4

Exprimer (autant que possible **de tête**) la variable écrite en gras en fonction des autres variables (et simplifier éventuellement). *Par exemple* $E = \gamma M \boldsymbol{c}^2$ *donne* $\mathbf{c} = \sqrt{\dfrac{E}{\gamma M}}$.

1. $E = \dfrac{1}{2}k\mathbf{x}^2$.
2. $T = 2\pi\sqrt{\mathbf{L}/g}$.
3. $u = Ee^{-\mathbf{t}/\tau}$.
4. $\dfrac{4}{3}\pi\mathbf{R}^3 = V$
5. $E = mgz + \mathbf{p}^2/2m$
6. $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{\mathbf{OA}}}$
7. $P\mathbf{V}^\gamma = C$.
8. $(P + \mathbf{a}/V^2)(V - nb) = RT$
9. $K_a = \dfrac{\mathbf{x}}{c_0 - \mathbf{x}}$

Exercice 1.5

En faisant un calcul approché basé sur quelques ordres de grandeur bien connus au lycée (nombre d'Avogadro, masse molaire d'un atome, taille de la Terre, etc.) ou faciles à estimer, choisir la bonne réponse.

Exemple : Volume de la mer méditérranée : ☐ 4,2×10$^6km^3$ ☐ 4,2×10$^8km^3$ ☐ 4,2×10$^9km^3$
On évalue *à la louche* ses dimensions : 3000km d'ouest en est, 1000km du nord au sud, pour une profondeur d'environ 2km. On obtient un volume $V = 3 \times 10^3 \times 1 \times 10^3 \times 2 \approx 6 \times 10^6 km^3$. La bonne réponse est donc $4,2 \times 10^6 km^3$. Vous remarquerez que même en estimant la profondeur à 10km et la longueur est-ouest à 5000 km, nous aurions choisi la même réponse. A vous de jouer !

1. masse d'un atome d'hydrogène : ☐ 1,67×10^{-24}kg ☐ 1,67×10^{-20}kg ☐ 1,67×10^{-27}kg
2. masse d'un mètre cube d'air : ☐ 1,2kg.m^{-3} ☐ 1,2g.m^{-3} ☐ 120g.m^{-3}
3. nombre de molécules dans un litre d'eau : ☐ 3,34×10^{22} ☐ 3,34×10^{25} ☐ 3,34×10^{28}
4. Superficie de la France ☐ 6,43×10$^5km^2$ ☐ 6,43×10$^3km^2$ ☐ $6,43 \times 10^7km^2$
5. Superficie de la Terre ☐ 5,1×10$^6km^2$ ☐ 5,1×10$^{10}km^2$ ☐ 5,1×10$^8km^2$
6. masse de la Terre : ☐ 6×10^{24}kg ☐ 6×10^{20}kg ☐ 6×10^{28}kg

Exercice 1.6

Les questions suivantes sont typiquement des *problèmes de Fermi*[1], comme ceux qu'aimait poser ce célèbre physicien à ses étudiants. Toutes les données de base sont à estimer en faisant preuve de bon sens, et surtout sans aucune source d'information extérieure (sinon, c'est pas drôle). Vous pouvez noter à l'écrit quelques résultats intermédiaires, mais ils doivent tenir sur un `POST-IT`.

1. Enrico Fermi, prix Nobel de physique en 1938

1. Avec l'eau d'une piscine municipale, a-t-on assez à boire pour toute la vie ?
2. Combien avez-vous de cheveux ?
3. Quelle est la longueur totale des trottoirs de Paris ?
4. Peut-on transporter un milliard d'euros en argent liquide dans une camionnette ?
5. Quel est le nombre de candidats qui se présentent au bac en France chaque année ?

A titre d'exemple, vous pouvez lire dans Wikipedia à l'article "estimation de Fermi" la réponse à la question « combien y a-t-il d' accordeurs de piano à Chicago ? ». Pour se mesurer à des problèmes plus physiques (mais aussi plus costauds...), cherchez sur Google : "eduscol les problèmes de Fermi".

2 Calcul dimensionnel

Les lettres utilisées dans les exercices suivants sont très classiques et indiquent implicitement la dimension de la grandeur : F est une force, S est une surface, L, λ, x ou h sont des longueurs, α est un angle, T et τ sont des temps, f une fréquence, v ou c une vitesse, R une résistance, m une masse, U une tension, g est l'intensité de la pesanteur, ρ est une masse volumique, $\dot{x}$ est la dérivée de x par rapport au temps et $\ddot{x}$ sa dérivée seconde, etc.

Quelle est la différence entre UNITÉ et DIMENSION d'une grandeur ? Par exemple, la *dimension* d'une vitesse est $L.T^{-1}$ (longueur divisée par un temps). Son *unité* SI (système international) est le $m.s^{-1}$. Mais on peut utiliser une autre unité, le $km.h^{-1}$ par exemple. Les dimensions de base utilisées en mécanique sont : longueur L, temps T, masse M. Les unités SI correspondantes sont le mètre m, la seconde s, et le kilogramme kg.

Exercice 2.1

Dans cet exercice on demande de déterminer la dimension de différentes grandeurs en fonction des dimensions de base L,T et M. Exemple : quelle est la dimension notée [F] d'une force F ? On écrit pour cela une loi *quelconque* de la physique faisant intervenir une force, par exemple le principe fondamental de la dynamique $F = ma$. On en déduit $[F] = [m][a]$, avec $[m] = M$ et $[a] = L.T^{-2}$ (une accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré). Finalement la dimension d'une force est $[F] = M.L.T^{-2}$. Son unité SI *de base* est le $kg.m.s^{-2}$. En pratique cette unité est notée N (Newton), c'est-à-dire que $1N = \dfrac{1kg \times 1m}{(1s)^2}$.
Déterminer de même les dimensions des grandeurs suivantes :

1. fréquence f
2. quantité de mouvement $\vec{p}$
3. masse volumique ρ
4. intensité g de la pesanteur
5. pression P
6. Niveau sonore $L = 10log(I/I_0)$
7. Energie cinétique E_c
8. Puissance P
9. constante de Planck h
10. Travail W
11. angle θ
12. $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
13. $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$

Exercice 2.2

Tous les gaz à basse pression P et haute température T obéissent à la *loi du gaz parfait* : $PV = nRT$, où V représente le volume, n la quantité de gaz et R une constante. Le produit PV peut-il s'exprimer en :
☐ N.m(*Newton*× mètre) ☐ J(*Joule*) ☐ Pa.m^2 ☐ W.s(*Watt.seconde*)

La *ténacité* d'un matériau s'exprime par : $K_c = \sqrt{EG_c}$, où G_c est *l'énergie de rupture*, qui est une énergie par unité de surface. E est le module élastique du matériau, qui représente une force par unité de surface. K_c peut-il s'exprimer en : ☐ N.m$^{-3/2}$ ☐ Pa.m$^{1/2}$ ☐ J.m$^{1/2}$ ☐ N.m$^{-1/2}$

Exercice 2.3

Dans des copies d'étudiants en prépa ont été trouvés les résultats suivants. Dire dans quels cas le correcteur peut mettre ZERO directement, sans prendre la peine de lire le raisonnement.
Remarque : il s'agit simplement de vérifier leur homogénéité (dimension identique pour chaque terme et chaque membre d'une égalité).

1. $S = \dfrac{h + H^2}{L}$
2. $V = 2\pi R h$
3. $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{L}}$
4. $F = \dfrac{1}{2}\rho S v$
5. $F = \dfrac{mg}{cos(\alpha)}$
6. $v = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$
7. $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
8. $U = U_0 e^{-2t}$
9. $v = \dfrac{L^2}{\tau} ln(t_2/t_1)$
10. $R = \dfrac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$
11. $\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{g}{z} = constante$
12. $t^2 = \dfrac{1}{f^2}[1 - \dfrac{1}{2}cos(3t)]$
13. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{g}{L}$
14. $\ddot{x} + \dfrac{\dot{x}}{\tau} + \dfrac{g}{L(1 + t/T)}x = 0$

Exemple : dans la première formule les termes h et H^2 n'ont pas la même dimension (il s'agit respectivement d'une longueur et d'une aire). Ils ne peuvent donc pas être ajoutés l'un à l'autre (selon le célèbre théorème de physique : *on n'additionne pas des patates et des carottes*). De plus h/L est sans dimension, et H^2/L a la dimension d'une longueur. Il ne s'agit en aucun cas d'une aire S.

Exercice 2.4

Déterminer la dimension (ou l'unité) de la grandeur écrite en gras. Les autres lettres utilisées ont leur signification habituelle (voir exercice précédent). On rappelle que l'argument d'un logarithme, d'une exponentielle, ou d'une fonction trigonométrique ne peut pas avoir de dimension (pas d'unité physique).

1. $L = L_0 e^{-\mathbf{k}x}$
2. $U = U_{max} sin(\mathbf{a}t)$
3. $v = \sqrt{\dfrac{PV}{\mathbf{a}}}$
4. $v = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\mathbf{A}\pi}{\rho\lambda}}$

Exercice 2.5

Encore plus fort : dans certains cas le calcul dimensionnel permet de "deviner" une formule, à partir de grandeurs caractéristiques du problème. Une éventuelle constante multiplicative reste indéterminée, mais la formule obtenue permet entre autres de calculer des ordres de grandeur.

Par exemple, en mécanique des fluides, on suppose que la force de frottement (ou force *de traînée*) F qui s'exerce sur un objet en mouvement ne peut dépendre que de la masse volumique ρ du fluide dans lequel il est plongé, de la section S de l'objet (aire), et de la vitesse v de l'objet par rapport au fluide. On cherche donc une expression de F comme combinaison des grandeurs *auxiliaires* S, ρ et v. On écrit les dimensions des grandeurs : $[\rho] = ML^{-3}$ (masse divisée par une longueur au cube), $[S] = L^2$, $[v] = LT^{-1}$, et $[F] = MLT^{-2}$. S'il existe une expression physique de F en fonction de ρ, S et v, cherchons les coefficients a, b, et c correspondants, c'est à dire tels que F soit proportionnelle à $\rho^a \times S^b \times v^c$. On écrit : $[F] = MLT^{-2} = (ML^{-3})^a \times (L^2)^b \times (LT^{-1})^c$. Ce système de trois équations à trois inconnues se résout immédiatement. On obtient $a = 1, c = 2$ puis $b = 1$. En conclusion, la force F est proportionelle à $\rho S v^2$. En mécanique des fluides on montre effectivement que $F = \dfrac{1}{2}C_x \rho S v^2$, où la constante de proportionnalité C_x (sans dimension) est appelée *coefficient de traînée*. Pour les voitures, le C_x va typiquement de $0,2$ à $0,4$.

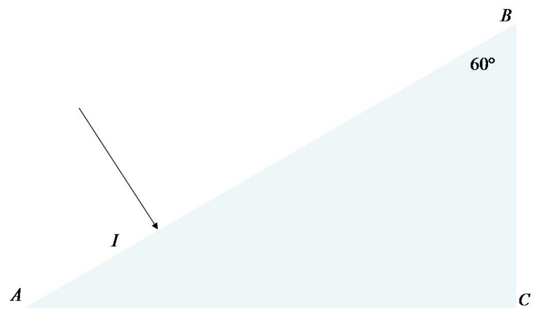
De même, 'deviner' l'expression de :

1. La durée de la chute libre d'un objet, en fonction de sa masse m, de sa hauteur de chute h, et de l'intensité de la pesanteur g.
2. La vitesse finale d'un objet en chute libre, en fonction de sa masse m, de sa hauteur de chute h, et de l'intensité de la pesanteur g.

3. La période t d'oscillation d'un pendule en fonction de la longueur l du pendule, de l'intensité de la pesanteur g, et de la masse m du pendule.
4. La période t d'oscillation d'une masse accrochée à un ressort, en fonction de la masse m, de l'intensité de la pesanteur g, et de la raideur k du ressort (k est en $N.m^{-1}$).
5. La surpression ΔP à l'intérieur d'une bulle de savon, en fonction de sa tension superficielle γ (en $N.m^{-1}$) et du rayon R de la bulle.
6. La durée t de refroidissement d'un objet en fonction de sa taille caractéristique l, de sa conductivité thermique λ (en $W.m^{-1}.K^{-1}$), de sa masse volumique ρ, et de sa capacité calorifique massique C (en $J.K^{-1}.kg^{-1}$). On pourra noter θ la dimension 'température'.

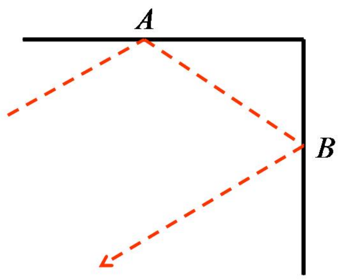
3 géométrie

Exercice 3.1



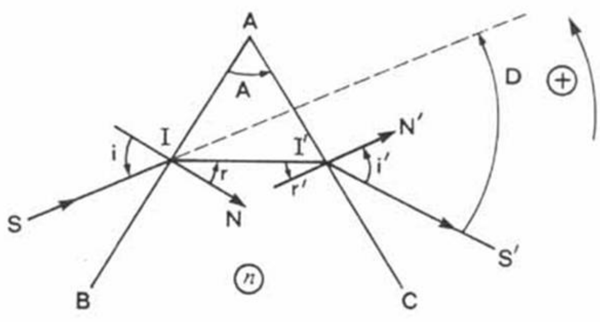
Un rayon lumineux rentre à la perpendiculaire d'un prisme par le côté AB. Il poursuit alors tout droit dans le prisme, puis se réfléchit successivement sur les côtés AC et AB avant de ressortir par la face BC. Déterminer la direction du rayon lorsqu'il ressort du prisme.
On rappelle la loi de la réflexion : à chaque "rebond", l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Exercice 3.2



Une boule de billard est lancée sur une bande et rebondit sur la bande suivante. On admet que le rebond obéit à la même loi de réflexion que la lumière. Montrer que la boule repart dans la direction exactement opposée à sa direction initiale.

Exercice 3.3

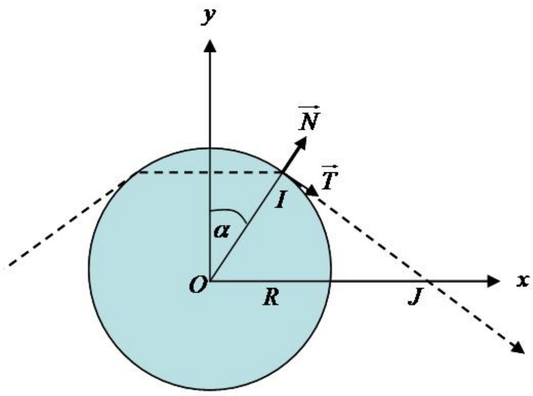


Le schéma ci-dessus représente la trajectoire d'un rayon lumineux à travers un prisme. Les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont les vecteurs perpendiculaires (ou *normaux*) respec-

tivement aux droites (AB) et (AC). Exprimer l'angle A en fonction des angles r et r'. Puis exprimer l'angle D en fonction des angles i, i', et $\widehat{A}$.
Remarque : *Ce sont des relations purement géométriques. La loi de la réfraction de Descartes est inutile ici.*

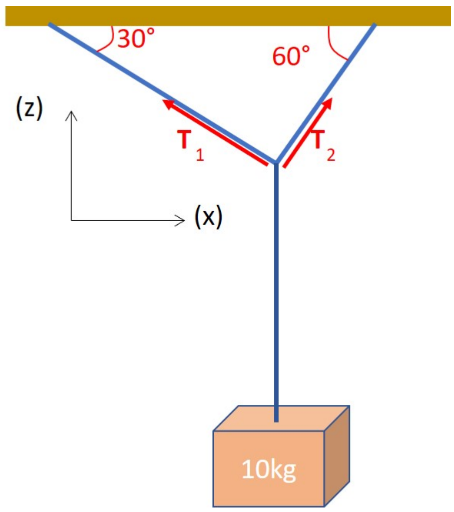
4 Vecteurs

Exercice 4.1



Un rayon lumineux parvient sur une lentille boule de rayon R et ressort au point I tangentiellement à cette boule. Les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont les vecteurs unitaires respectivement tangent et perpendiculaire à la boule, au point I.
Déterminer les composantes suivant x et y des vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ en fonction de l'angle α.
Exprimer en fonction de R et de α les composantes du vecteur $\vec{OJ}$ dans le repère $(\vec{T}, \vec{N})$ et la distance OJ.

Exercice 4.2



En écrivant que le noeud central est à l'équilibre sous l'action des trois forces, exprimer la norme de chacune des forces $\vec{T_1}, \vec{T_2}$. On donne $g = 9,81 m.s^{-2}$.

5 Mise en équation

Exercice 5.1

Voici un extrait du sujet du bac S 2016 (métropole), intitulé *de l'effet Doppler à ses applications* :

1. Mouvement relatif d'une source sonore et d'un détecteur

Nous nous intéressons dans un premier temps au changement de fréquence associé au mouvement relatif d'une source sonore S et d'un détecteur placé au point M (figure 1). Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre dans lequel le détecteur est immobile. Une source S émet des « bips » sonores à intervalles de temps réguliers dont la période d'émission est notée T_0. Le signal sonore se propage à la célérité v_{son} par rapport au référentiel terrestre.

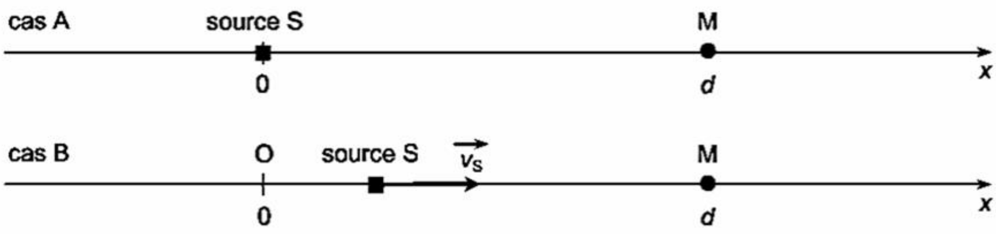


Figure 1. Schéma représentant une source sonore immobile (cas A), puis en mouvement (cas B).

1.2. Cas B : la source S, initialement en x = 0, se déplace à une vitesse constante v_s suivant l'axe Ox en direction du détecteur immobile. La vitesse v_s est inférieure à la célérité v_{son}. On suppose que la source reste à gauche du détecteur.

Le détecteur perçoit alors les différents bips séparés d'une durée $\boxed{T' = T_0\left(1-\frac{v_S}{v_{son}}\right)}$

Dans ce sujet, la formule fondamentale de l'effet Doppler (encadrée) a été 'parachutée', c'est-à-dire admise sans démonstration. Mettez en équation cette situation physique et démontrez la formule encadrée.

Exercice 5.2

Chaque fois qu'une balle de ping-pong tombe d'une certaine hauteur sur une table, elle remonte aux trois quarts de cette hauteur (c'est la réglementation officielle).
On lâche une balle sans vitesse d'une hauteur h au dessus d'une table. L'intensité de la pesanteur vaut g. Au bout de combien de temps rencontre-t-elle la table ? Au bout de quel temps supplémentaire y revient-elle ? Quelle est la durée des rebonds suivants ? Montrer que la balle finit par s'arrêter au bout d'une durée $\tau = \sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$.